ساختمان داده‌ها

فصل دوم

آرایه ها و ساختارها

E-mail: Hadi.khademi@gmail.com

مهر ماه ۹۴- دانشگاه علم و فرهنگ

نوع داده ای مجرد

نوع داده مجرد یا انتزاعی

- نوع داده مجرد یا انتزاعی (ADT) نوع داده ای است که در آن مشخصات داده ها و اعمال بر روی آنها از بازنمایی و پیاده سازی داده جدا می شود.

E-mail: Hadi.khademi@gmail.com

structure *Natural_Number* is

objects: an ordered subrange of the integers starting at zero and ending at the maximum integer (*INT_MAX*) on the computer

functions:

for all $x, y \in$ *Nat_Number*; *TRUE*, *FALSE* $\in$ *Boolean*
and where +, −, <, and == are the usual integer operations

Nat_No Zero( )	::=	0
Boolean Is_Zero(x)	::=	**if** (x) **return** *FALSE*
		else return *TRUE*
Nat_No Add(x, y)	::=	**if** (($x + y$) <= *INT_MAX*) **return** $x + y$
		else return *INT_MAX*
Boolean Equal(x, y)	::=	**if** (x == y) **return** *TRUE*
		else return *FALSE*
Nat_No Successor(x)	::=	**if** (x == *INT_MAX*) **return** x
		else return $x + 1$
Nat_No Subtract(x, y)	::=	**if** ($x < y$) **return** 0
		else return $x - y$

end *Natural_Number*

Structure 1.1: Abstract data type *Natural_Number*

نوع داده ای مجرد عدد طبیعی

E-mail: Hadi.khademi@gmail.com

آرایه ، ساختار و یونیون

آرایه

- مجموعه ای از عناصر از یک نوع داده می باشد

ساختار

- مجموعه ای از عناصر است که لزومی ندارد داده های آن یکسان باشد

یونیون

- اعلان یونیون مشابه تعریف و اعلان یک ساختار است با این تفاوت که فیلدهای یک یونیون باید در حافظه با هم مشترک باشند

E-mail: Hadi.khademi@gmail.com

- ما می توانیم ساختارهای داده خود را به کمک typedef ایجاد کنیم

```
struct {
        char name[10];
        int age;
        float salary;
        } person;
```

```
strcpy(person.name,"james");
person.age = 10;
person.salary = 35000;
```

- حال می توان از این نوع داده ای استفاده کرد

human_being ali, hasan;

```
typedef struct human_being {
        char name[10];
        int age;
        float salary;
        };
```

or

```
typedef struct {
        char name[10];
        int age;
        float salary;
        } human_being;
```

ساختارها

E-mail: Hadi.khademi@gmail.com

- فقط یک فیلد یونیون در هر زمان فعال می گردد.

```
enum   kind   {stu,emp};
typedef   struct   person {
            kind   flag;
            union   {
                 int   empno;
                 long int  stuno;
            } no;
};
```

```
person   ali,hasan;

ali.flag= stu;
Ali.no.stuno=13245346753;

hasan.flag=emp;
hasan.no.empno=14353;
```

یونیون

E-mail: Hadi.khademi@gmail.com

structure *Array* is

objects: A set of pairs <*index*, *value*> where for each value of *index* there is a value from the set *item*. *Index* is a finite ordered set of one or more dimensions, for example, {0, ··· , *n*−1} for one dimension, {(0, 0), (0, 1), (0, 2), (1, 0), (1, 1), (1, 2), (2, 0), (2, 1), (2, 2)} for two dimensions, etc.

functions:

for all $A \in Array$, $i \in index$, $x \in item$, j, $size \in$ integer

Array Create(*j*, *list*)	::=	**return** an array of *j* dimensions where *list* is a *j*-tuple whose *i*th element is the the size of the *i*th dimension. *Items* are undefined.
Item Retrieve(*A*, *i*)	::=	**if** ($i \in index$) **return** the item associated with index value *i* in array *A* **else return** error
Array Store(*A*,*i*,*x*)	::=	**if** (*i* in *index*) **return** an array that is identical to array *A* except the new pair <*i*, *x*> has been inserted **else return** error.

end *Array*

آرایه به عنوان یک نوع داده مجرد

E-mail: Hadi.khademi@gmail.com

لیست ها

- لیست های مرتب شده یا خطی به صورت

Ordered (linear) list: (item1, item2, item3, …, itemn)

مثال

(Sunday, Monday, Tuesday, Wednesday, Thursday, Friday, Saturday)

(Ace, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, Jack, Queen, King)

(1941, 1942, 1943, 1944, 1945)

(a1, a2, a3, …, an-1, an)

E-mail: Hadi.khademi@gmail.com

لیست ها

- **اعمال**

۱) پیدا کردن طول یک لیست

۲) خواندن اقلام داده یک لیست از چپ به راست یا بر عکس

۳) بازیابی i امین عنصر از یک لیست

۴) تعویض یک قلم اطلاعاتی در i امین موقعیت یک لیست

۵) درج یک قلم داده جدید در i امین موقعیت یک لیست

۶) حذف یک قلم اطلاعاتی از i امین موقعیت یک لیست

نمایش یک لیست مرتب شده به صورت یک آرایه

- **پیاده سازی**

نگاشت ترتیبی (1)~(4) sequential mapping

نگاشت غیر ترتیبی (5)~(6) non-sequential mapping

E-mail: Hadi.khademi@gmail.com

یک ساختار خودارجاعی ساختاری است که در آن یک جز
یا بیشتر ، اشاره گری به خود آن می باشد.
ساختارهای خود ارجاعی معمولا به روالهای
مدیریت حافظه پویا احتیاج دارند (malloc free) تا
به راحتی حافظه را گرفته و آزاد کنند.

ساختارهای خود ارجاعی

E-mail: Hadi.khademi@gmail.com

structure *Polynomial* is

objects: $p(x) = a_1 x^{e_1} + \cdots + a_n x^{e_n}$; a set of ordered pairs of $<e_i, a_i>$ where a_i in *Coefficients* and e_i in *Exponents*, e_i are integers >= 0

functions:

for all *poly*, *poly*1, *poly*2 ∈ *Polynomial*, *coef* ∈ *Coefficients*, *expon* ∈ *Exponents*

Polynomial Zero()	::=	**return** the polynomial, $p(x) = 0$
Boolean IsZero(*poly*)	::=	**if** (*poly*) **return** *FALSE* **else return** *TRUE*
Coefficient Coef(*poly*,*expon*)	::=	**if** (*expon* ∈ *poly*) **return** its coefficient **else return** zero
Exponent Lead_Exp(*poly*)	::=	**return** the largest exponent in *poly*
Polynomial Attach(*poly*, *coef*, *expon*)	::=	**if** (*expon* ∈ *poly*) **return** error **else return** the polynomial *poly* with the term <*coef*, *expon*> inserted
Polynomial Remove(*poly*, *expon*)	::=	**if** (*expon* ∈ *poly*) **return** the polynomial *poly* with the term whose exponent is *expon* deleted **else return** error
Polynomial SingleMult(*poly*, *coef*, *expon*)	::=	**return** the polynomial $poly \cdot coef \cdot x^{expon}$
Polynomial Add(*poly*1, *poly*2)	::=	**return** the polynomial *poly*1 + *poly*2
Polynomial Mult(*poly*1, *poly*2)	::=	**return** the polynomial *poly*1 · *poly*2

end *Polynomial*

نوع داده ای مجرد چند جمله ای

E-mail: Hadi.khademi@gmail.com

نوع داده ای مجرد چند جمله ای

- **چند جمله ایهای نمونه**

$$A(x) = 3x^{20}+2x^{5}+4 \text{ and } B(x) = x^{4}+10x^{3}+3x^{2}+1$$

فرض کنید دو چندجمله ای زیر را داشته باشیم که در انها x متغیر و ai ضریب و i توان است آنگاه

$$A(x) + B(x) = \Sigma(ai + bi)xi$$

$$A(x) \cdot B(x) = \Sigma(aixi \cdot \Sigma(bjxj))$$

به صورت مشابه می توان تفریق و تقسیم چند جمله ایها و بسیاری از عملیات دیگر را تعریف کرد.

E-mail: Hadi.khademi@gmail.com

- **Representation I**

a.degree=n

a.coef[i]=a_{n-I} //coefficient

- ضرایب به ترتیب نزول درجه در ارایه ذخیره شود

```
#define MAX_degree 101
/*MAX degree of polynomial+1*/
typedef struct{
        int degree;
        float coef [MAX_degree];
}polynomial;
```

Drawback: The first representation may waste space.

نوع داده ای مجرد چند جمله ای

E-mail: Hadi.khademi@gmail.com

- **Representation II**

آرایه coef را به گونه ای در نظر بگیریم که طول آن برابر a.degree+1 شود

```
Class polynomial{
   private:
      int degree;
      float *coef;};
Polynomial::polynomial( int d)
{
   degree=d;
   coef=new float[degree+1]
}
```

Drawback: $X^{1000}+1$ in this representation has 2 nonzero term

نوع داده ای مجرد چند جمله ای

E-mail: Hadi.khademi@gmail.com

- **Representation III**

تمام چند جمله ایها را در یک ارایه ذخیره کنیم

فقط ضرایب غیر صفر را به همراه توان انها ذخیره کنیم

```
#define MAX_TERMS 100
/*size of terms array*/
typedef struct{
        float coef;
        int expon;
}polynomial;

polynomial terms [MAX_TERMS];
int avail = 0;
```

نوع داده ای مجرد چند جمله ای

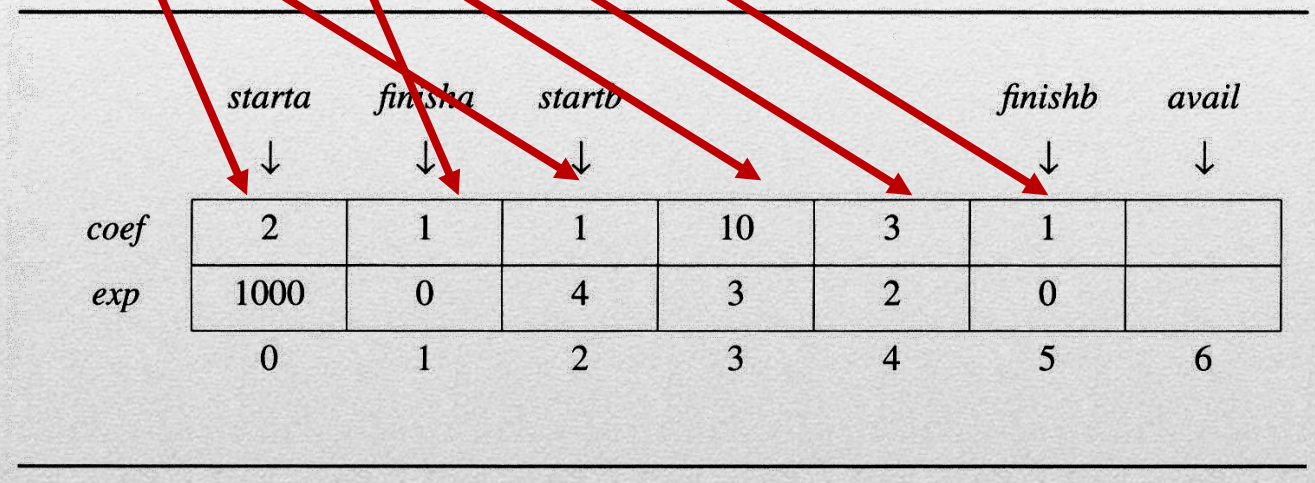
E-mail: Hadi.khademi@gmail.com

storage requirements: start, finish, 2*(finish-start+1)

$A(x) = 2x^{1000}+1$

$B(x) = x^4+10x^3+3x^2+1$

representation <start, finish>	specification poly
<0,1>	A
<2,5>	B



نوع داده ای مجرد چند جمله ای

E-mail: Hadi.khademi@gmail.com

```
void padd(int starta,int finisha,int startb, int finishb,
                                  int *startd,int *finishd)
{
/* add A(x) and B(x) to obtain D(x) */
   float coefficient;
   *startd = avail;
   while (starta <= finisha && startb <= finishb)
      switch(COMPARE(terms[starta].expon,
                     terms[startb].expon)) {
         case -1: /* a expon < b expon */
               attach(terms[startb].coef,terms[startb].expon)
               startb++;
               break;
         case 0: /* equal exponents */
               coefficient = terms[starta].coef +
                             terms[startb].coef;
               if (coefficient)
                  attach(coefficient,terms[starta].expon);
               starta++;
               startb++;
               break;
         case 1: /* a expon > b expon */
               attach(terms[starta].coef,terms[starta].expon)
               starta++;
   }
   /* add in remaining terms of A(x) */
   for(; starta <= finisha; starta++)
      attach(terms[starta].coef,terms[starta].expon);
   /* add in remaining terms of B(x) */
   for( ; startb <= finishb; startb++)
      attach(terms[startb].coef, terms[startb].expon);
   *finishd = avail-1;
}
```

- یک تابع c که دو چند جمله ای Aو B را جمع میکند تا D را به دست آورد

$$D = A + B$$

Analysis: $O(n+m)$ where n (m) is the number of nonzeros in A (B)

نوع داده ای مجرد چند جمله ای

E-mail: Hadi.khademi@gmail.com

```
void attach(float coefficient, int exponent)
{
/* add a new term to the polynomial */
   if (avail >= MAX_TERMS) {
      fprintf(stderr,"Too many terms in the polynomial\n");
      exit(1);
   }
   terms[avail].coef = coefficient;
   terms[avail++].expon = exponent;
}
```

مشکل: هنگامی که چندجمله ای لازم نباشد باید فشرده سازی انجام شود

جابجایی داده انجام می شود

نوع داده ای مجرد چند جمله ای

E-mail: Hadi.khademi@gmail.com

- **ماتریس های مهم**
  - ماتریس مربعی n*n
  - ماتریس بالا و پایین مثلثی
  - ماتریس اسپارس
  - ماتریس قطری

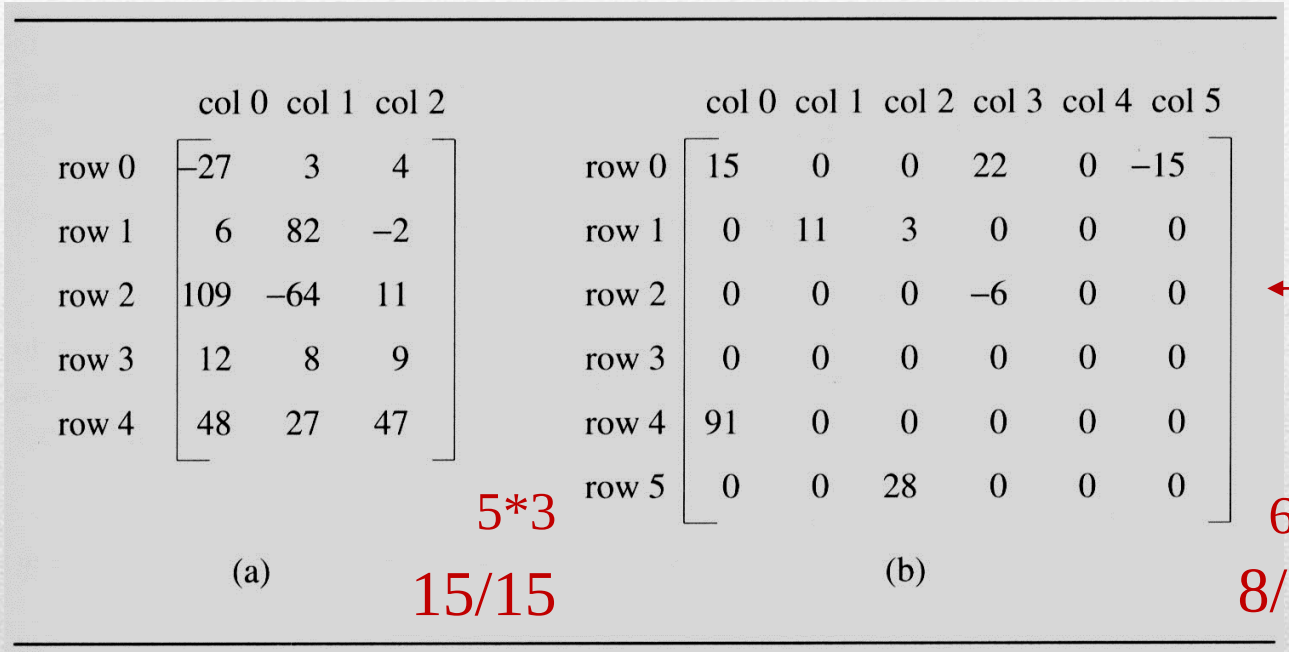
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 & \mathbf{C}_1 & & & \cdots & & 0 \\ \mathbf{A}_2 & \mathbf{B}_2 & \mathbf{C}_2 & & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ & & \mathbf{A}_k & \mathbf{B}_k & \mathbf{C}_k & & \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & & \mathbf{A}_{n-1} & \mathbf{B}_{n-1} & \mathbf{C}_{n-1} \\ 0 & & \cdots & & & \mathbf{A}_n & \mathbf{B}_n \end{bmatrix}$$

$$U = \begin{bmatrix} u_{1,1} & u_{1,2} & u_{1,3} & \cdots & u_{1,n} \\ & u_{2,2} & u_{2,3} & \cdots & u_{2,n} \\ & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & \ddots & u_{n-1,n} \\ 0 & & & & u_{n,n} \end{bmatrix} \quad L = \begin{bmatrix} l_{1,1} & & & & 0 \\ l_{2,1} & l_{2,2} & & & \\ l_{3,1} & l_{3,2} & \ddots & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \\ l_{n,1} & l_{n,2} & \cdots & l_{n,n-1} & l_{n,n} \end{bmatrix}$$

ماتریس ها

E-mail: Hadi.khademi@gmail.com

- در ریاضیات ، یک ماتریس شامل m سطر و n ستون از اعضا می باشد
- ماتریسی که عناصر صفر آن زیاد بوده ماتریس اسپارس نامیده می شود.



	col 0	col 1	col 2
row 0	−27	3	4
row 1	6	82	−2
row 2	109	−64	11
row 3	12	8	9
row 4	48	27	47

(a)

	col 0	col 1	col 2	col 3	col 4	col 5
row 0	15	0	0	22	0	−15
row 1	0	11	3	0	0	0
row 2	0	0	0	−6	0	0
row 3	0	0	0	0	0	0
row 4	91	0	0	0	0	0
row 5	0	0	28	0	0	0

(b)

sparse matrix data structure?

5*3

15/15

6*6

8/36

ماتریس اسپارس

E-mail: Hadi.khademi@gmail.com

- حداقل اعمال ممکن شامل ایجاد، جمع ، ضرب و ترانهاده ماتریس می باشد.

structure *Sparse_Matrix* is
objects: a set of triples, <*row*, *column*, *value*>, where *row* and *column* are integers and form a unique combination, and *value* comes from the set *item*.
functions:
for all $a, b \in$ *Sparse_Matrix*, $x \in$ *item*, i, j, *max_col*, *max_row* $\in$ *index*

Sparse_Matrix Create(*max_row*, *max_col*) ::=
return a *Sparse_Matrix* that can hold up to *max_items* = *max_row* × *max_col* and whose maximum row size is *max_row* and whose maximum column size is *max_col*.

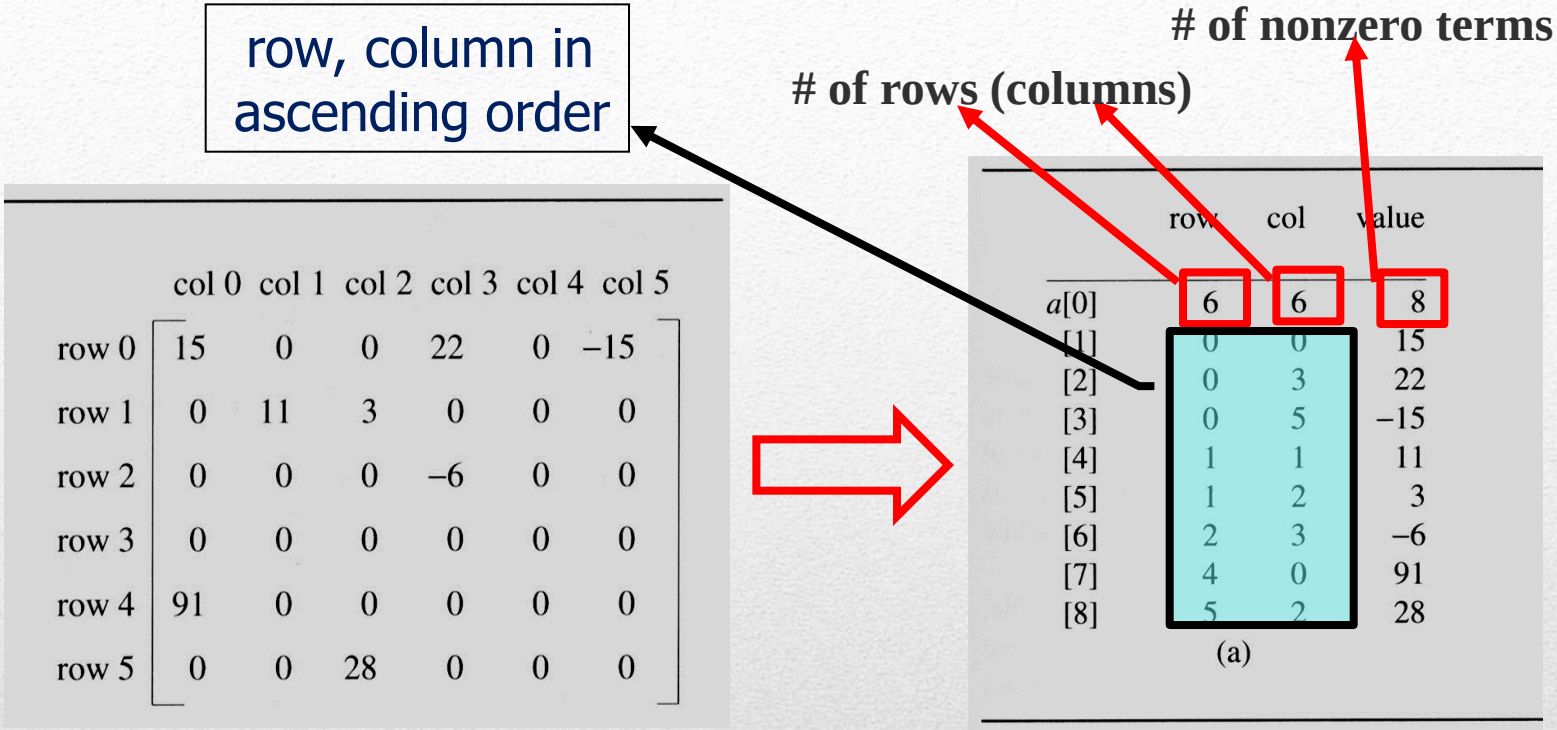
Sparse_Matrix Transpose(*a*) ::=
return the matrix produced by interchanging the row and column value of every triple.

Sparse_Matrix Add(*a*, *b*) ::=
if the dimensions of *a* and *b* are the same
return the matrix produced by adding corresponding items, namely those with identical *row* and *column* values.
else return error

Sparse_Matrix Multiply(*a*, *b*) ::=
if number of columns in *a* equals number of rows in *b*
return the matrix *d* produced by multiplying *a* by *b* according to the formula: $d[i][j] = \sum(a[i][k] \cdot b[k][j])$ where $d(i, j)$ is the (i, j)th element
else return error.

ماتریس اسپارس

E-mail: Hadi.khademi@gmail.com



- می توان از یک آرایه از سه تایی های <row, col, value>برای نمایش یک ماتریس اسپارس استفاده کرد.

ماتریس اسپارس

E-mail: Hadi.khademi@gmail.com

- پیاده سازی Create operation

Sparse_Matrix Create(*max_row*, *max_col*) ::=

```
#define MAX_TERMS 101 /* maximum number of terms +1*/
typedef struct {
        int col;
        int row;
        int value;
        } term;
term a[MAX_TERMS];
```

ماتریس اسپارس

E-mail: Hadi.khademi@gmail.com

- برای پیدا نمودن ترانهاده یک ماتریس باید جای سطرها و ستون ها را عوض کرد بدین مفهوم که هر عنصر a[i][j] در ماتریس اولیه به عنصر b[j][i] در ماتریس ترانهاده تبدیل می شود.

	row	col	value
a[0]	6	6	8
[1]	0	0	15
[2]	0	3	22
[3]	0	5	−15
[4]	1	1	11
[5]	1	2	3
[6]	2	3	−6
[7]	4	0	91
[8]	5	2	28

(a)

	row	col	value
b[0]	6	6	8
[1]	0	0	15
[2]	0	4	91
[3]	1	1	11
[4]	2	1	3
[5]	2	5	28
[6]	3	0	22
[7]	3	2	−6
[8]	5	0	−15

(b)

ترانهاده یک ماتریس اسپارس

E-mail: Hadi.khademi@gmail.com

For each row i

take element <i, j, value> and store it in element <j, i, value> of the transpose.

difficulty: where to put <j, i, value>

(0, 0, 15) ====> (0, 0, 15)
(0, 3, 22) ====> (3, 0, 22)
(0, 5, -15) ====> (5, 0, -15)
(1, 1, 11) ====> (1, 1, 11)

For all elements in column j,

place element <i, j, value> in element <j, i, value>

الگوریتم بیان شده نشان می دهد که باید تمام عناصر در ستون ۰ را پیدا و آنها را در سطر ۰ ذخیره کرد همچنین تمام عناصر ستون ۱ را پیدا و در سطر ۱ قرار داد و همین فرآیند را ادامه داد. از آنجا که ماتریس اولیه سطری بوده لذا ستون های داخل هر سطر از ماتریس ترانهاده نیز به صورت صعودی مرتب می شود.

ترانهاده یک ماتریس اسپارس

E-mail: Hadi.khademi@gmail.com

Assign
A[i][j] to B[j][i]

place element <i, j, value> in element <j, i, value>

For all columns i

For all elements in column j

Scan the array "columns" times. The array has "elements" elements.

```
void transpose(term a[], term b[])
/* b is set to the transpose of a */
{
   int n,i,j, currentb;
   n = a[0].value;        /* total number of elements */
   b[0].row = a[0].col; /* rows in b = columns in a */
   b[0].col = a[0].row; /* columns in b = rows in a */
   b[0].value = n;
   if (n > 0 )  { /* non zero matrix */
      currentb = 1;
      for (i = 0; i < a[0].col; i++)
      /* transpose by the columns in a */
         for (j = 1; j <= n; j++)
         /* find elements from the current column */
            if (a[j].col == i) {
            /* element is in current column, add it to b */
               b[currentb].row = a[j].col;
               b[currentb].col = a[j].row;
               b[currentb].value = a[j].value;
               currentb++;
            }
   }
}
```

==> O(columns*elements)

الگوریتم ترانهاده

E-mail: Hadi.khademi@gmail.com

i=1 j=8
a[i].col = 2 != i

EX: A[6][6] transpose to B[6][6]

Matrix A

	Row	Col	Value
a[0]	6	6	8
[1]	0	0	15
[2]	0	3	22
[3]	0	5	-15
[4]	1	1	11
[5]	1	2	3
[6]	2	3	-6
[7]	4	0	91
[8]	5	2	28

Matrix B

Row	Col	Value
0	6	6	8
1	0	0	15
2	0	4	91
3	1	1	11

```
void transpose(term a[], term b[])
/* b is set to the transpose of a */
{
   int n,i,j, currentb;
   n = a[0].value;        /* total number of elements */
   b[0].row = a[0].col; /* rows in b = columns in a */
   b[0].col = a[0].row; /* columns in b = rows in a */
   b[0].value = n;
   if (n > 0 )  { /* non zero matrix */
      currentb = 1;
      for (i = 0; i < a[0].col; i++)
      /* transpose by the columns in a */
        for (j = 1; j <= n; j++)
        /* find elements from the current column */
          if (a[j].col == i) {
          /* element is in current column, add it to b */
            b[currentb].row = a[j].col;
            b[currentb].col = a[j].row;
            b[currentb].value = a[j].value;
            currentb++;
          }
   }
}
```

Set Up row & column in B[6][6]

And So on…

E-mail: Hadi.khademi@gmail.com

بحث در مورد الگوریتم ترانهاده

- **مقایسه الگوریتم ارائه شده برای بازنمایی اسپارس و بازنمایی دوبعدی**
  - O(columns*elements) vs. O(columns*rows)
  - elements --> columns * rows وقتی ماتریس اسپارس نباشد O(columns^2*rows)
- **مشکل:** ارایه columns بار بررسی می شود

  می توان ترانهاده ماتریسی که به صورت سه تاییها نگهداری شده را در زمان O(columns + elements) پیدا کرد.
- **راهکار:**

  تعداد عناصر در هر ستون ماتریس اولیه را مشخص کنید

  شروع هر سطر ماتریس ترانهاده را تعیین کنید

E-mail: Hadi.khademi@gmail.com

- تعداد عضوهای هر ستون ماتریس A تعداد عضوهای هر سطر B را به دست می دهد
- Rowstart[i] برابر RowStart[i-1]+RowSize[i-1] است

	[0]	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]
row_terms =	2	1	2	2	0	1
starting_pos =	1	3	4	6	8	8

	row	col	value
a[0]	6	6	8
[1]	0	0	15
[2]	0	3	22
[3]	0	5	−15
[4]	1	1	11
[5]	1	2	3
[6]	2	3	−6
[7]	4	0	91
[8]	5	2	28

(a)

transpose

	row	col	value
b[0]	6	6	8
[1]	0	0	15
[2]	0	4	91
[3]	1	1	11
[4]	2	1	3
[5]	2	5	28
[6]	3	0	22
[7]	3	2	−6
[8]	5	0	−15

(b)

الگوریتم ترانهاده سریع

E-mail: Hadi.khademi@gmail.com

	[0]	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	
row_terms	2	0	2	2	0	0	#col = 6
							#term = 6
starting_pos	1	3	4	6	8	8	

Matrix A

	Row	Col	Value
a[0]	6	6	8
[1]	0	0	15
[2]	0	3	22
[3]	0	5	-15
[4]	1	1	11
[5]	1	2	3
[6]	2	3	-6
[7]	4	0	91
[8]	5	2	28

```
void fast_transpose(term a[], term b[])
{
/* the transpose of a is placed in b */
   int row_terms[MAX_COL], starting_pos[MAX_COL];
   int i,j, num_cols = a[0].col, num_terms = a[0].value;
   b[0].row = num_cols;  b[0].col = a[0].row;
   b[0].value = num_terms;
   if (num_terms > 0) { /* nonzero matrix */
      for (i = 0; i < num_cols; i++)
         row_terms[i] = 0;
      for (i = 1; i <= num_terms; i++)
         row_terms[a[i].col]++;
      starting_pos[0] = 1;
      for (i = 1; i < num_cols; i++)
         starting_pos[i] =
                     starting_pos[i-1] + row_terms[i-1];
      for (i = 1; i <= num_terms; i++) {
         j = starting_pos[a[i].col]++;
         b[j].row = a[i].col;   b[j].col = a[i].row;
         b[j].value = a[i].value;
      }
   }
}
```

E-mail: Hadi.khademi@gmail.com

I = 8

	[0]	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]
row_terms =	2	1	2	2	0	1
starting_pos =	3	4	6	8	8	9

Matrix A

	Row	Col	Value
a[0]	6	6	8
[1]	0	0	15
[2]	0	3	22
[3]	0	5	-15
[4]	1	1	11
[5]	1	2	3
[6]	2	3	-6
[7]	4	0	91
[8]	5	2	28

Matrix B

	Row	Col	Value
0	6	6	8
1	0	0	15
2	0	4	91
3	1	1	11
4	2	1	3
5	2	5	28
6	3	0	22
7	3	2	-6
8	5	0	-15

```
void fast_transpose(term a[], term b[])
{
/* the transpose of a is placed in b */
   int row_terms[MAX_COL], starting_pos[MAX_COL];
   int i,j, num_cols = a[0].col, num_terms = a[0].value;
   b[0].row = num_cols;  b[0].col = a[0].row;
   b[0].value = num_terms;
   if (num_terms > 0) { /* nonzero matrix */
      for (i = 0; i < num_cols; i++)
         row_terms[i] = 0;
      for (i = 1; i <= num_terms; i++)
         row_terms[a[i].col]++;
      starting_pos[0] = 1;
      for (i = 1; i < num_cols; i++)
         starting_pos[i] =
                     starting_pos[i-1] + row_terms[i-1];
      for (i = 1; i <= num_terms; i++) {
         j = starting_pos[a[i].col]++;
         b[j].row = a[i].col;   b[j].col = a[i].row;
         b[j].value = a[i].value;
      }
   }
}
```

```
void fast_transpose(term a[], term b[])
{
/* the transpose of a is placed in b */
   int row_terms[MAX_COL], starting_pos[MAX_COL];
   int i,j, num_cols = a[0].col, num_terms = a[0].value;
   b[0].row = num_cols;  b[0].col = a[0].row;
   b[0].value = num_terms;
   if (num_terms > 0) { /* nonzero matrix */
      for (i = 0; i < num_cols; i++)
         row_terms[i] = 0;
      for (i = 1; i <= num_terms; i++)
         row_terms[a[i].col]++;
      starting_pos[0] = 1;
      for (i = 1; i < num_cols; i++)
         starting_pos[i] =
                     starting_pos[i-1] + row_terms[i-1];
      for (i = 1; i <= num_terms; i++) {
         j = starting_pos[a[i].col]++;
         b[j].row = a[i].col;   b[j].col = a[i].row;
         b[j].value = a[i].value;
      }
   }
}
```

For columns

For elements

Buildup row_term & starting_pos

For columns

For elements

transpose

بحث در مورد الگوریتم ترانهاده سریع

E-mail: Hadi.khademi@gmail.com

- **مقایسه الگوریتم ارائه شده برای بازنمایی اسپارس و بازنمایی دوبعدی**

  وقتی ماتریس اسپارس باشد

  O(columns+elements) vs. O(columns*rows)

  هم در حافظه و هم در زمان اجرا صرفه جویی خواهد شد

  وقتی ماتریس اسپارس نباشد elements --> columns * rows

  O(columns*rows)

  شبیه حالت استفاده از بازنمایی دوبعدی، فقط ضریب ثابت FastTranspose بزرگتر از حالت ارایه ای

- **هزینه:** FastTranspose در مقایسه با transpose نیازمند حافظه بیشتری می باشد.

  Additional row_terms and starting_pos arrays

-

بحث در مورد الگوریتم ترانهاده سریع

E-mail: Hadi.khademi@gmail.com

- معمولا ارایه چند بعدی از طریق ذخیره سازی عضوهایش در یک آرایه یک بعدی پیاده سازی می شود.
- اگر یک ارایه به صورت a[upper0][upper1]…[uppern] اعلان شده باشد تعداد عضوهای این ارایه برابر است با

$$\prod_{i=0}^{n-1} upper_i$$

- مثال: اگر ما a را به صورت a[10][10][10] اعلان کنیم آنگاه به ۱۰۰۰ واحد حافظه برای ذخیره ان احتیاج داریم
- اگر یک ارایه به صورت a[p1..q1][p2..q2]…[pn..qn] اعلان شده باشد تعداد عضوهای این ارایه برابر است با

$$\prod_{i=1}^{n} (q_i - p_i + 1)$$

- مثال: اگر ما a را به صورت a[4..5][2..4][1..2] [3..4] اعلان کنیم آنگاه این ارایه 2*3*2*2=24 عضو دارد

نمایش آرایه ها

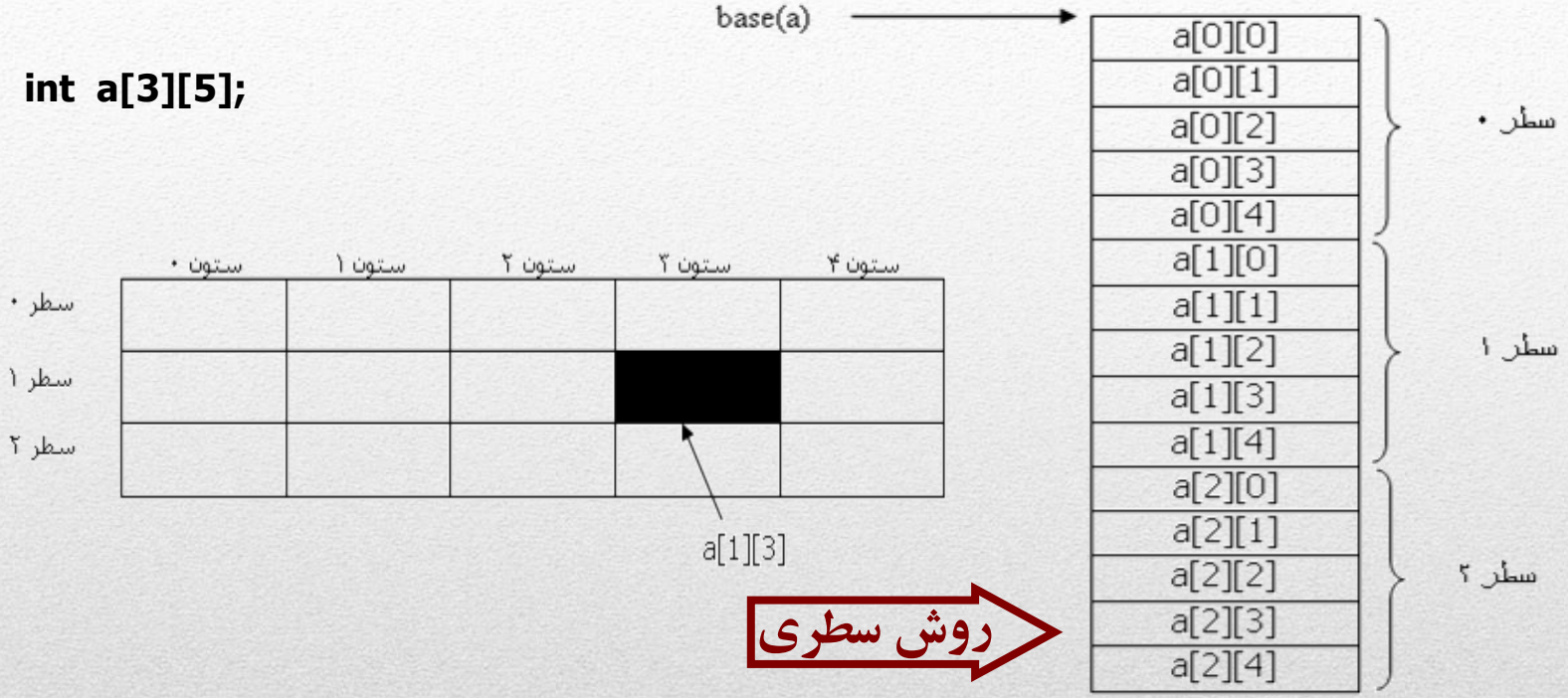
E-mail: Hadi.khademi@gmail.com

- آرایه های دوبعدی می توانند به صورت سطری یا ستونی ذخیره شوند. در روش سطری، ابتداعناصر سطر اول، سپس عناصر سطردوم و غیره ذخیره می شوند. در روش ستونی، ابتدا عناصر ستون اول، سپس عناصر ستون دوم و غیره ذخیره می شوند.
- در روش سطری آرایه های چند بعدی را به وسیله سطرهای آن ذخیره می کنیم. به عنوان مثال آرایه دو بعدی $A[upper_0][upper_1]$ دارای upper0 سطر به صورت $(row_0, row_1, ..., row_{upper0-1})$ است به نحوی که هر سطر شامل upper1 عنصر می باشد.

پیاده سازی آرایه های چند بعدی

E-mail: Hadi.khademi@gmail.com

```
int  a[3][5];
```



پیاده سازی آرایه های چند بعدی

E-mail: Hadi.khademi@gmail.com

- فرض کنید آرایه A با upper0 سطر و upper1 ستون تعریف شده است و α آدرس A[0][0] باشد،
- برای رسیدن به اولین عنصر سطر iاُم (یعنی عنصر A[i][0]) باید از i سطر کامل بگذریم که هر سطر آن دارای upper1 عنصر است. لذا آدرس عنصر اول سطر i برابر است با:

آدرس اولین عنصر سطر i = α+ i. upper1

- فاصله اولین عنصر سطر i تا ستون j برابر با j است. بنابراین آدرس عنصر A[i][j] به صورت زیر است:

آدرس عنصر A[i][j] = α+ i. Upper1+j

پیاده سازی آرایه های چند بعدی

E-mail: Hadi.khademi@gmail.com

A[upper$_0$][upper$_1$]

- Row major order: **A[i][j] : α + i* *upper*$_1$ + j**
- Column major order: **A[i][j] : α + j* *upper*$_0$ + i**

	col$_0$	*col*$_1$		*col*$_{u1-1}$
row$_0$	A[0][0] α	A[0][1] α + *u*$_0$	. . .	A[0][*u*1-1] α+(u$_1$-1)* u$_0$
row$_1$	A[1][0] α + *u*$_1$	A[1][1]	. . .	A[1][*u*1-1]
	.	.		.
row$_{u0-1}$	A[*u*0-1][0] α+(u$_0$-1)*u$_1$	A[*u*0-1][1]	. . .	A[*u*0-1][*u*1-1]

پیاده سازی آرایه های چند بعدی

E-mail: Hadi.khademi@gmail.com

- برای نمایش آرایه سه بعدی $A[upper_0][upper_1][upper_2]$، آن را به عنوان $upper_0$ آرایه دو بعدی با ابعاد $upper_1 \times upper_2$ در نظر می گیریم.
- برای پیدا کردن محل a[i][j][k]
  - address of $a[i][0][0] = \alpha + i*upper_1*upper_2$
  - چون i ارایه دوبعدی با ابعاد upper1×upper2 قبل از این عضو وجود دارد
  - address of $a[i][j][0]=\alpha + i*upper_1*upper_2+j*upper_2$
  - address of $a[i][j][k]=\alpha + i*upper_1*upper_2+j*upper_2+k$

پیاده سازی آرایه های چند بعدی

E-mail: Hadi.khademi@gmail.com

پیاده سازی آرایه های چند بعدی

- با تعمیم بحث ارائه شده فرمول ادرس هر عضو $A[i_0][i_1]\ldots[i_{n-1}]$ در یک ارایه n بعدی که به صورت $A[upper_0][upper_1]\ldots[upper_{n-1}]$ به صورت زیر به دست می اید.

$$
\begin{aligned}
\alpha &+ i_0 upper_1 upper_2 \ldots upper_{n-1} \\
&+ i_1 upper_2 upper_3 \ldots upper_{n-1} \\
&+ i_2 upper_3 upper_4 \ldots upper_{n-1} \\
&\cdot \\
&\cdot \\
&\cdot \\
&+ i_{n-2} upper_{n-1} \\
&+ i_{n-1}
\end{aligned}
= \alpha + \sum_{j=0}^{n-1} i_j a_j
$$

where:

$$
\begin{cases}
a_j = \prod_{k=j+1}^{n-1} upper_k & 0 \le j < n-1 \\
a_{n-1} = 1
\end{cases}
$$

E-mail: Hadi.khademi@gmail.com

- فرمولی برای تعیین ادرس عضو $a[i_1][i_2]...[i_n]$ در ارایه ای به دست اورید که به صورت $a[l_1..u_1][l_2..u_2]...[l_n..u_n]$ اعلان شده است. در دو حالت نمایش سطری و ستونی تمرین را حل کنید.
- فرمولی برای آدرس دهی عضوهای ماتریس پایین مثلثی به دست آورید

$$\begin{bmatrix} X & 0 & 0 \dots & 0 \\ X & X & 0 \dots & 0 \\ X & X & X \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \cdots & \cdot \\ X & X & X \dots & X \end{bmatrix}$$

(الف) پایین مثلثی.

$$\begin{bmatrix} X & X & X \dots & X \\ 0 & X & X \dots & X \\ 0 & 0 & X \dots & X \\ \cdot & \cdot & \cdot \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \cdots & \cdot \\ 0 & 0 & 0 \cdots & X \end{bmatrix}$$

(ب) بالا مثلثی.

تمرین

E-mail: Hadi.khademi@gmail.com

ضرب دو ماتریس

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 7 & 8 & 9 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

2 * 3 　　3 *4

- برای ضرب دو ماتریس فوق باید هر سطر از ماتریس اول در ستونهای ماتریس دوم ضرب شود و حاصل هر یک با هم جمع شود.

$$\begin{bmatrix} 1*7+2*2+3*6 & 1*8+2*3+3*7 & 1*9+2*4+3*8 & 1*1+2*5+3*9 \\ 4*7+5*2+6*6 & 4*8+5*3+6*7 & 4*9+5*4+6*8 & 4*1+5*5+6*9 \end{bmatrix}$$

بنابراین ماتریس حاصلضرب یک ماتریس ٤*٢ است.

ضرب ماتریس

- با توجه به ماتریس های مشخص و معلوم A وB ، فرض کنید که A یک ماتریس m×n و B یک ماتریس m×p باشد آنگاه ماتریس حاصل ضرب D دارای ابعاد m×p است و عنصر i>،<j آن به صورت زیر تعریف می شود :

برای $0 \le j < p$ و $0 \le i < m$

$$d_{ij} = \sum_{k=0}^{n-1} a_{ik} b_{kj}$$

- نکته : حاصل ضرب دو ماتریس اسپارس ممکن است یک ماتریس اسپارس نباشد.

- ضرب ماتریسها مانند ضرب اعداد در ریاضی دارای خاصیت شرکت پذیری است.
- اگر تعدادی ماتریس داشته باشیم که بین آنها علامت * است می توان با استفاده از خاصیت شرکت پذیری به شیوه های مختلف آنها را در هم ضرب کرد.
- برای مثال : می خواهیم ۴ ماتریس زیر را در هم ضرب کنیم و سپس تعداد اعمال ضرب را در هر حالت به دست آوریم :

A * B * C * D
20*2 2*30 30*12 12*8
A (B (CD)
تعداد اعمال ضرب: 30*8*12 + 2*8*30 + 20*8*2 = 3680
(AB)(CD)
تعداد اعمال ضرب: 20*30*2 + 30*8*12 + 20*8*2 = 8880
A ((BC) D)
تعداد اعمال ضرب: 2*12*30 + 2*8*12 + 20*8*2 = 1232
((AB)C)D
تعداد اعمال ضرب: 20*30*2 + 20*12*30 + 20*8*12 = 10320
(A(BC))D
تعداد اعمال ضرب: 2*12*30 + 20*12*2 + 20*8*12 = 3120

پرانتزگذاری متفاوت ضرب زنجیره ای ماتریسها

- **قضیه کاتالان:** تعداد حالات شرکت پذیری ضرب i+۱ ماتریس از رابطه زیر بدست می آید:

$$C_i = \frac{1}{i+1}\binom{2i}{i}$$

- **محاسبه بهینه ترین تعداد ضرب در ضرب چند ماتریس:** (عمل ضرب کمتر)
  - **قضیه:**

$$A_{m \times n} \times B_{n \times k} \times C_{K \times L}$$

A(BC) تعداد ضرب < (AB)C تعداد ضرب $\longleftrightarrow$ $\frac{1}{m}+\frac{1}{k} > \frac{1}{n}+\frac{1}{L}$

ضرب ماتریس ها

E-mail: Hadi.khademi@gmail.com

- **الگوریتمی بیابید که برای Nماتریس ترتیب بهینه را پیدا کند**

(ترتیب بهینه فقط به ابعاد ماتریسها بستگی دارد. بنابراین ورودی الگوریتم N (تعداد ماتریسها) وابعاد ماتریسها D است.)

تمرین ضرب ماتریس ها

E-mail: Hadi.khademi@gmail.com

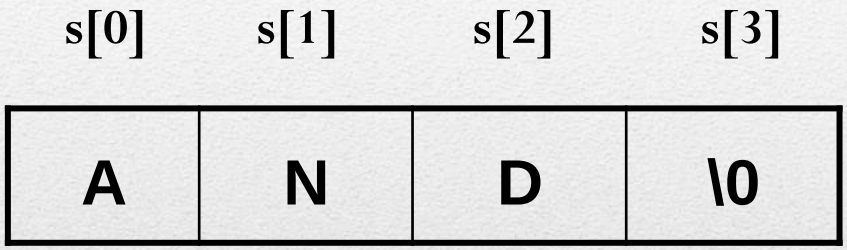
- عملکردهایی که می توان برای رشته ها تعریف کرد مانند :
  - ایجاد یک رشته تهی جدید
  - خواندن یا نوشتن یک رشته
  - ضمیمه کردن دو رشته به یکدیگر (concatenation)
  - کپی کردن یک رشته
  - مقایسه رشته ها
  - درج کردن یک زیر رشته به داخل رشته
  - برداشتن یک زیر رشته از یک رشته مشخص
  - پیدا کردن یک الگو(pattern) یا عبارت در یک رشته

نوع داده ای مجرد رشته

E-mail: Hadi.khademi@gmail.com

نوع داده ای مجرد رشته

- نحوه ذخیره سازی در حافظه :
- در زبان C ، رشته ها به صورت آرایه های کاراکتری که به کاراکترتهی، 0\،ختم می شوند نگهداری می گردد.



char s[] = {"AND" };

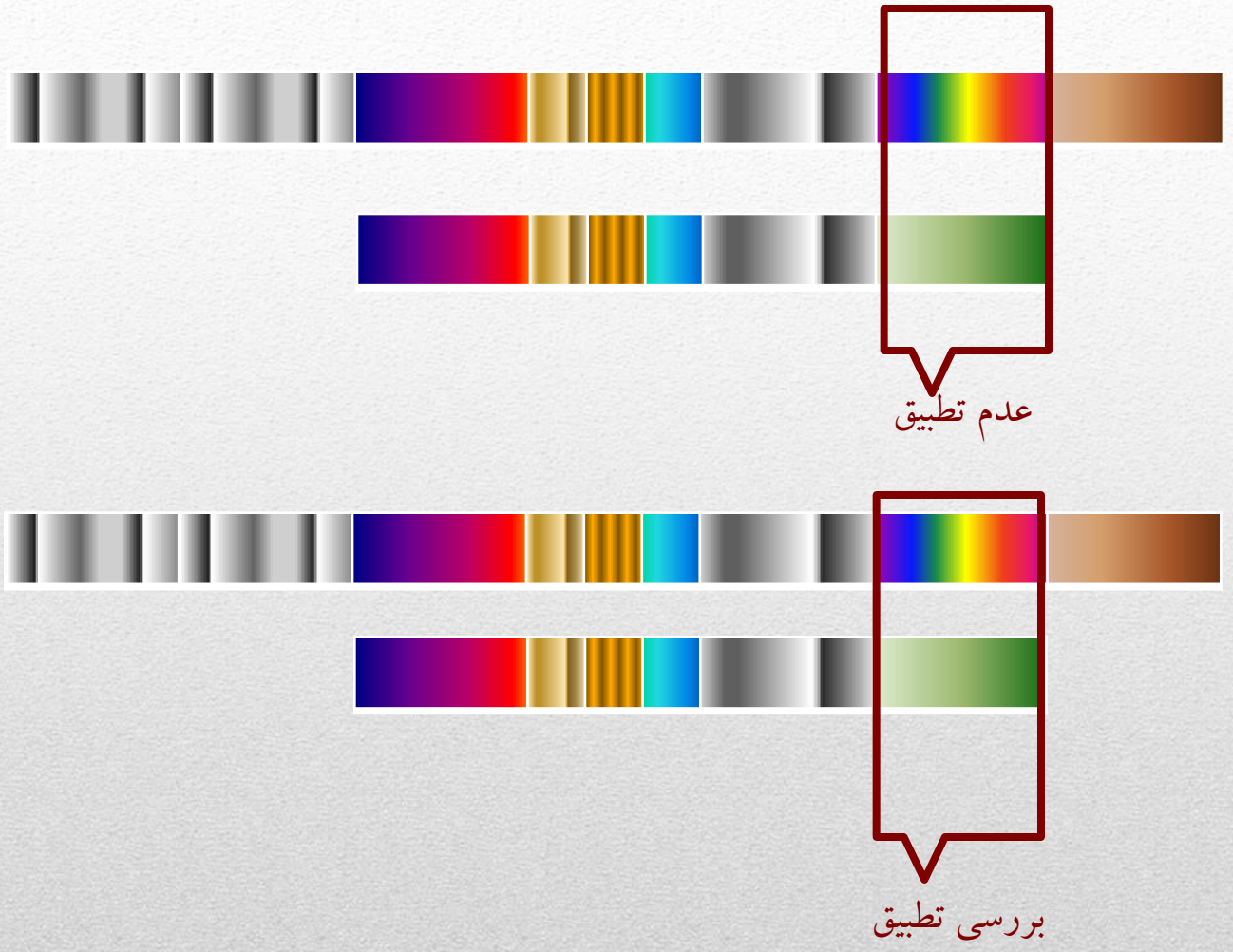
E-mail: Hadi.khademi@gmail.com

- فرض کنید که دو رشته داریم ، string وpat، و الگوی pat باید در string پیدا شود.

```
int string::Find (String pat)
{
//i is set to -1 if paty does not occure in s (*this)
//otherwise i is set to point to the first position in *this where pat begins.
char * p=pat.str; *s=str;
int i=0; //i is starting point
if (*s && *p)
      while (  i <= length()-pat.length() )
                if (*p++=*s++) //characters match, get next char in pat and s
                        if (! *p)  return i;
                }
                else { //no match
                        i++; s=str+i; p= pat.str;
                }
return -1; // pat is empty or does not occur in s
} // end of Find
```

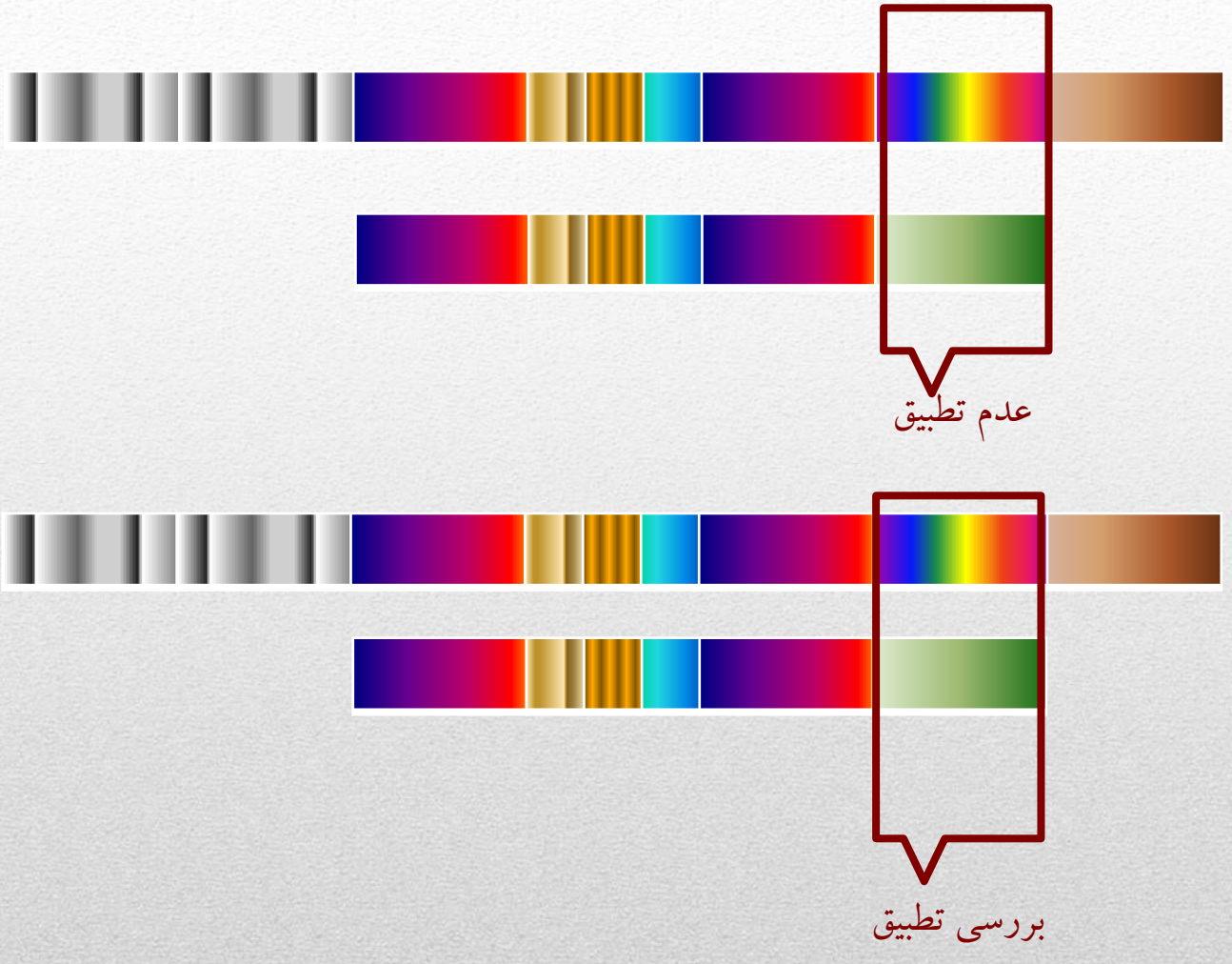
پیدا کردن یک الگو در یک رشته

E-mail: Hadi.khademi@gmail.com



الگوریتم کنوث-موریس-پرات

E-mail: Hadi.khademi@gmail.com



الگوریتم کنوث-موریس-پرات

E-mail: Hadi.khademi@gmail.com

الگوریتم کنوث-موریس-پرات

- تابع شکست: برای هر یک از عناصر تعیین میکنیم در صورت شکست از چه عنصری بررسی مجدد آغاز شود. و به ازای هر کاراکتر در موقعیت j در رشته pat یک مقدار بدست می‌آید.

j(اندیس)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
pat	a	b	c	a	b	c	a	c	a	b
f	-1	-1	-1	0	1	2	3	-1	0	1

$$f(j)=\begin{cases} k & \text{بزرگترین مقدار } k \text{ که } k<j \text{ بصورتی که } p_0p_1\ldots p_k = p_{j-k}p_j \\ & \text{اگر چنین } k \geq j \text{ ای وجود داشته باشد } k+1\ldots p_j \\ -1 & \text{در غیر اینصورت} \end{cases}$$

j(اندیس)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
pat	a	b	c	a	b	c	a	c	a	b
f	-1	-1	-1	0	1	2	3	-1	0	1

الگوریتم کنوث-موریس-پرات

- افزودن متغیر عضو f جهت نگهداری مقادیر شکست و تغییرات اعمال شده در سازنده‌ها

```
class CMyString
{
public:
        char *str;
        char *f;
        CMyString(char *init,int len);
        CMyString(CMyString &s);
        int Getlength();
        int Find(CMyString &pat);
        void Fastfind(CString &pat);
        void Fail();
};
CMyString::CMyString(char *init,int le)
{
        str=new char[le];
        f=new char[le];
        strcpy(str,init);
}
CMyString::CMyString(CMyString &s)
{
        str=new char[s.Getlength()+1];
        f=new char[s.Getlength()+1];
        strcpy(str,s.str);
}
```

```
int CMyString::Fail()
{
  int lengthp=Getlength();
  f[0]=-1;
  for(int j=1 ; j<lengthp ; j++)
  {
   int pf = f[j-1];
   while(str[j]!=str[pf+1] && pf>=0)
        i=f[pf];
   if(str[j]==str[pf+1])
        f[j]=pf+1;
   else
        f[j]=-1;
  }
}
```

```
int CMyString::Fastfind(CMyString &pat)
{
  pat.Fail();
  int posp=0,poss=0;
  int lengthp=pat.Getlength(),lengths=Getlength();
  while(posp<lengthp && poss<lengths)
  {
        if(pat.str[posp]==str[poss])
        {
              posp++;
              poss++;
        }
        else
        {
              if(posp==0)
                    poss++;
              else
                    posp=pat.f[posp-1]+1;
        }
  }
  if(posp<lengthp)
        return -1;
  return poss-lengthp;
}
```